К СТАТИСТИКЕ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД

В. А. Амбарцумиан

Наблюдаемое распределение эксцентриситетов среди двойных звезд с известными орбитами далеко не доказывает (вопреки мнению Джинса) наличия равного распределения энергий среди них. Прямое рассмотрение распределения внутренних энергий звездных пар (больших полуосей орбит) доказывает, наоборот, что равное распределение энергий не наступило даже среди широких пар. Это обстоятельство вместе с отсутствием диссоциативного равновесия между двойными и одиночными звездами приводит к возрасту совокупности двойных звезд не свыше 10^{10} лет.

Рядом авторов было указано, что изучение закона распределения элементов орбит двойных звезд, а также других статистических зависимостей для этих объектов может дать интересные результаты для космогонии вообще и для решения вопроса о возрасте нашей звездной системы в частности *. Однако, как было указано автором в одной предварительной заметке [1], часто из наблюдательных данных делаются ошибочные выводы. Цель настоящего исследования — показать неправильность некоторых старых выводов, получивших довольно широкое распространение в литературе [2], и указать на некоторые новые следствия из наблюдательного материала, касающегося двойных звезд.

1. Распределение эксцентриситетов орбит двойных звезд

Из наблюденных закономерностей довольно часто дискутируется вопрос о распределении эксцентриситетов орбит. Именно, установлено, что среди двойных звезд с определенными орбитами число пар с эксцентриситетами, меньшими чем ε, пропорционально ε^2.

С другой стороны, Джинс показал, что при статическом равновесии (больцмановское распределение) должна соблюдаться та же зависимость. Отсюда делаются заключения о том, что мы уже имеем дело с наиболее вероятным распределением, что приводит непосредственно к долгой шкале времени. Согласно более осторожной формулировке Джинса, приведенной в ответе на предварительную заметку автора [3], равное распределение энергий (equipartition) установилось по крайней мере в некоторых отношениях.

Прежде всего нужно четко понять, что приведенное распределение эксцентриситетов может в значительной степени отличиться от действительного вследствие селективности наблюдательного материала. Нам известны пока лишь орбиты пар со сравнительно короткими периодами. С другой стороны, средний эксцентриситет, как указывают наблюдения, несомненно возрастает с периодом. Поэтому на самом деле относительное число всех

* Повсюду в настоящей статье речь идет о возрасте нашей звездной системы, а не о возрасте вселенной в целом.

пар с бо́льшими эксцентриситетами больше, чем относительное число этих пар среди двойных звезд с известными орбитами.

Для внесения ясности в рассматриваемый вопрос с теоретической стороны рассмотрим распределение состояний спутников в фазовом пространстве. При этом координатами в фазовом пространстве пусть служат три компоненты положения спутника и три компоненты его импульса, отнесенные к главной звезде. При статистическом равновесии мы должны иметь, что число спутников dN в элементе объема $dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$ фазового пространства равно

$$dN = Ce^{-\frac{E(x,\,y,\,z,\,p_x,\,p_y,\,p_z)}{\theta}}\,dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z, \tag{1}$$

где

$$E = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{\gamma M m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{2}$$

есть энергия спутника, а M и m — массы главной звезды и спутника, γ — гравитационная постоянная, а θ — модуль больцмановского распределения.

Рассмотрим, однако, вместо этого наиболее вероятного распределения значительно более общий тип распределения, когда плотность в фазовом пространстве имеет не специальный вид $Ce^{-\frac{E}{\theta}}$, а является произвольной заданной функцией $f(E)$ энергии E. Тогда

$$dN = f(E)\,dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z.$$

Произведем теперь в фазовом пространстве канонические преобразования, перейдя от переменных x, y, z, p_x, p_y и p_z к переменным лунной теории Делонэ[4]: L, G, H, l, g и h. Что касается первых трех из этих величин, то они выражаются через обычные элементы эллиптического движения: большую полуось a, наклонность i и эксцентриситет ε следующим образом:

$$L = m\sqrt{\gamma M}\,a^{1/2},$$
$$G = m\sqrt{\gamma M}\,a^{1/2}\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2},$$
$$H = m\sqrt{\gamma M}\,a^{1/2}\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}\cos i.$$

Угловые же координаты l, g и h представляют собой соответственно не что иное, как среднюю аномалию, расстояние периастрия до узла и долготу восходящего узла.

Как известно, при каноническом преобразовании в фазовом пространстве элемент объема сохраняет свою величину (якобиан преобразования равен единице). Иными словами:

$$dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z = dL\,dG\,dH\,dl\,dg\,dh.$$

С другой стороны,

$$E = -\frac{\gamma^2 M^2 m^3}{2L^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{\gamma M m}{a},$$

т. е. энергия зависит только от элемента L. Следовательно, в нашем случае и плотность в фазовом пространстве зависит только от L, и мы можем написать

$$dN = f(L)\,dL\,dG\,dH\,dl\,dg\,dh.$$

Отсюда следует, что число пар, у которых L заключено между L и $L+dL$ а G больше некоторого заданного значения G_0 равно

$$8\pi^3 f(L)\,dL \int\limits_{G_0}^{L} dG \int\limits_{0}^{G} dH,$$

так как l, g и h меняются независимо друг от друга от 0 до 2π, H принимает значения от 0 до G и G по своему определению меняется от 0 до L. Написанное выражение поэтому равно

$$4\pi^3 f(L)(L^2 - G_0^2)\,dL,$$

но

$$L^2 - G_0^2 = m^2\gamma^2 M^2 a\varepsilon_0^2 = L^2\varepsilon_0^2,$$

где ε есть эксцентриситет, соответствующий орбите, с данными L и $G = G_0$.

Итак число звезд с $\varepsilon < \varepsilon_0$ (т. е. $G > G_0$) и L, заключенным в пределах между L и $L+dL$, равно

$$4\pi^3 f(L)\,L^2\varepsilon_0^2\,dL,$$

откуда следует, что число всех орбит, для которых $\varepsilon < \varepsilon_0$ равно

$$N(\varepsilon_0) = 4\pi^3\varepsilon_0^2 \int\limits_0^\infty f(L)\,L^2\,dL. \qquad (3)$$

Интеграл в правой части есть постоянное число, и поэтому мы получаем следующую теорему:

Если плотность в фазовом пространстве есть произвольная функция от L, т. е. от полной энергии и только от этой величины, то число всех звезд с эксцентриситетами, меньшими чем ε_0, пропорционально ε_0^2.

Отсюда следует, что если даже считать, что наблюденное $N(\varepsilon_0)$ тоже пропорционально ε_0^2 (хотя, как указывалось выше, селективность материала заставляет сильно сомневаться в этом), то отсюда вовсе нельзя заключать, что фазовая плотность пропорциональна $e^{-\frac{E}{\theta}}$, т. е. что имеет место равное распределение энергий. Наоборот, при любом распределении энергий при условии лишь, что фазовая плотность не зависит от других элементов, мы должны иметь $N(\varepsilon) \sim \varepsilon_0^2$.

Таким образом, даже если принять, что в действительности $N(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^2$, все же отсюда нельзя делать заключений о равном распределении энергий, а тем более о продолжительности жизни звездной системы.

Заслуживает, однако, внимания следующее обстоятельство. Согласно предыдущему в случае, когда фазовая плотность зависит только от L (т. е. от E, или, что то же, от большой полуоси), для каждого интервала dL мы имеем, что число орбит с эксцентриситетами, меньшими чем ε_0, тоже должно быть пропорционально ε_0^2 или, что число орбит с эксцентриситетами, заключенными между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$, должно быть пропорционально $\varepsilon\,d\varepsilon$ независимо от a. Поэтому и среднее значение эксцентриситета для каждого интервала величины большой полуоси

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^1 \varepsilon^2 \, d\varepsilon}{\int_0^1 \varepsilon \, d\varepsilon} = \frac{2}{3} \tag{4}$$

не должно зависеть от a, а должно быть равно двум третям. Наблюдательный материал находится в противоречии с этим. На это указывает следующая таблица, полученная Эйткеном[5]:

$\bar{P}$	$\bar{\varepsilon}$	n
16.8 лет	0.43	14
37.1	0.40	24
73.0	0.53	24
138	0.57	23
200	0.62	18

В этой таблице даны средние значения эксцентриситетов для звезд сгруппированных по периодам. В первом столбце дан средний период каждой группы, а в последнем — число звезд в группе. Если к этой таблице присоединить еще статистический результат Ресселла о том, что для звезд с периодами около 5000 лет средний эксцентриситет равен 0.76, то мы должны заключить, что $\bar{\varepsilon}$ зависит от P. Известно, что $P \sim L^3$. Поэтому $\bar{\varepsilon}$ зависит от L. Совершенно очевидно, что основное допущение, сделанное выше, неверно, и фазовая плотность зависит не только от большой полуоси. Значит, не только нельзя говорить, что фазовая плотность пропорциональна $e^{-\frac{E}{\theta}}$, но вообще нельзя считать, что она зависит только от энергии. Впрочем, имеются указания, что приведенная зависимость $\bar{\varepsilon}$ от P сильно подвержена действию наблюдательной селекции[10, 11, 12].

Впрочем, возможно, что для далеких компонент ($P > 100$ лет) изменение $\bar{\varepsilon}$ мало, и что для них фазовая плотность зависит только от E. Поэтому интересно, на какую зависимость фазовой плотности от E указывают наблюдения и насколько существующая зависимость близка к больцмановской.

2. Вывод фазовой плотности из наблюдательных данных

В настоящем параграфе мы допустим, что фазовая плотность зависит только от E, и постараемся получить из эмпирического материала форму этой зависимости. Мы видели, что по крайней мере для малых L фазовая плотность, возможно, зависит и от других элементов. Поэтому полученный нами результат нужно будет трактовать лишь как результат усереднения по другим элементам. Даже в таком виде наш вывод будет иметь некоторую ценность, тем более, что для далеких компонент наше допущение вероятно справедливо. Итак, пусть фазовая плотность равна $f(L)$. Это значит, что в элементе объема $dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$ число звезд будет равно

$$f\left(\gamma Mm \sqrt{\frac{m}{\frac{2Mm\gamma}{r} - \frac{p^2}{m}}}\right) dx\,dy\,dz \cdot dp_x\,dp_y\,dp_z,$$

где

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}; \quad p=\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}.$$

Поэтому плотность распределения в обычном пространстве равна

$$\rho=\iiint f\left(\gamma Mm\sqrt{\frac{m}{\frac{2Mm\gamma}{r}-\frac{p^2}{m}}}\right)dp_x dp_y dp_z=$$

$$=4\pi\int\limits_0^{m\sqrt{\frac{2M\gamma}{r}}} f\left(\gamma Mm\sqrt{\frac{m}{\frac{2Mm\gamma}{r}-\frac{p^2}{m}}}\right)p^2 dp.$$

Под „распределением в обычном пространстве“ здесь понимается пространственное распределение всех спутников, когда главные звезды все совмещены в одной точке. Верхний предел интегрирования в последнем интеграле получается из условия, что мы рассматриваем только физические спутники, двигающиеся по эллиптическим орбитам, т. е. такие системы, у которых полная энергия отрицательна.

Введем теперь в последнем интеграле вместо ρ переменную интегрирования

$$L=\gamma Mm\sqrt{\frac{m}{\frac{2Mm\gamma}{r}-\frac{p^2}{m}}}.$$

Мы получим

$$\rho(r)=\int\limits_{m\sqrt{\frac{\gamma M}{2}}\,r^{1/2}}^{\infty} f(L)\sqrt{\frac{2Mm^2\gamma}{r}-\frac{\gamma^2M^2m^4}{L^2}}\cdot\frac{4\pi^2\gamma^2M^2m^4\,dL}{L^3}.$$

Если обозначим

$$K=m\sqrt{\frac{\gamma M}{2}}\cdot r^{1/2},$$

то

$$\rho(r)=4\pi^2\gamma^3M^3m^6\int\limits_K^{\infty} f(L)\sqrt{\frac{1}{K^2}-\frac{1}{L^2}}\frac{dL}{L^3},$$

или

$$\rho(K)=C\int\limits_K^{\infty} f(L)\sqrt{L^2-K^2}\,\frac{dL}{KL^4}. \qquad (5)$$

Пользуясь этим интегральным уравнением, мы можем по известной плотности в обычном пространстве ρ найти фазовую плотность $f(L)$. В известном исследовании Эпик[6] показал, что имеющийся наблюдательный материал, будучи исправлен за наблюдательную селекцию, дает

$$\rho \sim \frac{1}{r^3}, \tag{6}$$

или

$$\rho \sim \frac{1}{K^6}.$$

Очевидно, что при этой специальной форме функции ρ уравнение (5) удовлетворится функцией

$$f(L) \sim \frac{1}{L^3}. \tag{7}$$

Сравним теперь эту „наблюденную“ плотность в фазовом пространстве с той, которая должна быть при статистическом равновесии. При статистическом равновесии мы должны иметь

$$f(L) = Ce^{-\frac{E}{\theta}} = Ce^{\frac{\gamma^2 M^2 m^3}{rL^2\theta}}. \tag{8}$$

Мы видим, что для выяснения вопроса нужно знать значение θ. Если совокупность двойных звезд пришла в статистическое равновесие в результате сближений с другими звездами, то θ должно быть порядка двух третей средней кинетической энергии поступательного движения окружающих звезд. Если примем, что средняя скорость поступательного движения звезд порядка 25 *км/сек*, то уже при $a > 20$ A. U. показатель в правой части формулы (8) очень мал по сравнению с единицей. Поэтому для всех больших значений L (а тем самым и a) мы с большой степенью приближения можем переписать (8) в виде

$$f(L) = \text{const}. \tag{9}$$

Между тем результат, полученный Эпиком, относится именно к далеким компонентам. Поэтому (7) относится именно к большим значениям L.

Мы видим, что „наблюденная“ фазовая плотность (7) меняется по закону, резко отличному от того, который имеет место при статистическом равновесии (9).

Можно показать, что „распределение в обычном пространстве“ для случая статистического равновесия тоже резко отличается от наблюденного. В самом деле, из (9) и (5) следует, что при статистическом равновесии

$$\rho \sim \frac{1}{r^{3/2}} \tag{10}$$

в противоречии с наблюденным распределением (6). Разница между (10) и (6) настолько велика, что не может быть никакого сомнения, что (10) не соблюдается в действительности хотя бы с малой степенью приближения. Поскольку закономерность (3) установлена Эпиком именно для далеких компонент с расстоянием до 10 000 A. U., то мы заключаем, что даже для столь далеких компонент влияние сближений еще не привело к статистическому равновесию (т. е. к наиболее вероятному распределению) в распределении больших полуосей, т. е. энергий. Как мы увидим, это сильно уменьшает верхнюю границу для продолжительности жизни звездной системы.

3. Проверка эпиковского закона обратных кубов на новом наблюдательном материале

В настоящем параграфе мы рассмотрим один очень простой способ проверки полученного Эпиком закона (6) для „распределения компонент в обыкновенном пространстве". Мы увидим, что совершенно новый метод анализа вопроса подтверждает приближенную правильность формулы (6).

Дело в том, что если компоненты распределены вокруг центральных звезд по закону $\frac{1}{r^n}$, где n — любое число, то распределение плотности в проекции на небесную сферу будет определяться законом $\frac{1}{r^{n-1}}$.

Если мы имеем некоторую совокупность двойных звезд с таким распределением, заключенную в некоторый элемент объема, и если этот элемент объема будет удаляться, то распределение в и д и м ы х расстояний в проекции будет, очевидно, продолжать удовлетворять закону $\frac{1}{r^{n-1}}$. Суммирование таких распределений для различных элементов объема вдоль пути луча и по различным направлениям на небесной сфере приведет тоже к пропорциональности $\frac{1}{r^{n-1}}$. Поэтому для всего видимого распределения в проекции мы должны получить для сколь угодного большого участка неба тот же закон.

В частности в предположении альтернативы

$$\rho \sim \frac{1}{r^3} \quad \text{и} \quad \rho \sim \frac{1}{r^{3/2}}$$

мы должны получить для распределения плотностей в проекции

$$\rho \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{и} \quad \rho \sim \frac{1}{r^{1/2}},$$

откуда следует, что число звезд с видимыми расстояниями, заключенными между r_2 и r_1, должно быть пропорционально

$$\lg_e \frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad r_2^{3/2} - r_1^{3/2}. \tag{11}$$

Для решения вопроса были взяты все звезды до видимой величины 9.0, лежащие в северном полушарии, имеющиеся в каталоге Э й т к е н а[7] всего (4640 звезд). В этих пределах каталог Э й т к е н а можно считать достаточно однородным, ибо все звезды до величины 9.0 были проверены на двойственность самим Э й т к е н о м на Ликской обсерватории. В следующей табличке дается число пар с расстояниями от 0″.5 до 1″, от 1″ до 2″, от 2″ до 4″ и от 4″ до 8″. Во второй и третьей строке даются числа, пропорциональные соответственно $\lg_e \frac{r_2}{r_1}$ и $r_2^{3/2} - r_1^{3/2}$, причем коэфициент пропорциональности C выбран таким образом, чтобы общее число в каждой из трех строк было одним и тем же.

Интервал	0.5—1″	1″—2″	2″—4″	4″—8″	Итого
Наблюденное число пар . . .	883	1160	1283	1314	4640
$C \lg_e \frac{r_2}{r_1}$	1160	1160	1160	1160	4640
$C\,(r_2^{3/2} - r_1^{3/2})$	136	382	1080	3040	4638

Из этого сопоставления видно, что формула $C \lg_e \frac{r_2}{r_1}$ является известным (с точностью до $10^0/_0$) приближением к наблюденным числам, в то время как формула $C\,(r_2^{3/2} - r_1^{3/2})$ ни в какой степени не оправдывается. Существующие уклонения от формулы $C \lg_e \frac{r_2}{r_1}$, несомненно, должны будут уменьшиться в случае исключения оптических пар.

Отсюда видно, что эпиковский закон $\rho \sim \frac{1}{r^3}$ в первом приближении подтверждается. Тем самым вновь показано, что энергии звездных пар распределены не по больцмановскому закону.

В ответ на предварительную заметку автора на рассмотренные выше темы Джинс признал[3], что равного распределения энергий не существует, но вслед за этим он добавил: „in certain respects there is a tolerably good approximation to equipartition“. В чем же Джинс видит хотя бы отдаленное приближение к „equipartition“ в области двойных звезд? После приведенных следствий из закона Эпика очевидно, что о каком бы то ни было приближении к equipartition не может быть и речи.

4. Время релаксации совокупности двойных звезд

Рассмотрим вопрос о времени, необходимом для того, чтобы совокупность двойных звезд, входящих в звездную систему, пришла бы в статистическое равновесие с окружающими звездами. Очевидно, что в состоянии статистического равновесия возможны два взаимно противоположных — взаимно компенсируемых — процесса: с одной стороны, должно происходить разрушение физических пар вследствие прохождения третьего тела и, с другой стороны, образование пар при сближении трех взаимно несвязанных звезд, причем третье тело уносит с собой избыток энергии, освободившейся в результате образования физической пары. Как мы увидим далее, в нашей звездной системе из-за отсутствия статистического равновесия полная взаимная компенсация этих процессов не происходит и притом в том смысле, что число образуемых пар ничтожно мало по сравнению с числом разрушаемых пар.

Наряду с разрушением пар могут происходить вследствие сближений с посторонними звездами и небольшие изменения энергии системы, которые могут, суммируясь, повлечь за собой и разрушение. Вот эти процессы изменения энергии (большой полуоси) вследствие сближений, а также разрушений пар и приводят к установлению статистического равновесия в смысле установления больцмановского распределения.

Очевидно, что среднее время разрушения звездной пары, которое мы сейчас вычислим, вполне достаточно для установления больцмановского распределения.

В самом деле, установление больцмановского распределения происходит путем изменений энергий, меньших, чем те, которые связаны с разрушением. Поэтому и необходимое для этого время не больше чем среднее время разрушения пары. Таким образом среднее время разрушения пары дает нам порядок „времени релаксации“ системы двойных звезд.

При наших вычислениях мы остановимся на „далеких парах“, т. е. на таких, у которых расстояние между компонентами превосходит 100 A. U. и в среднем порядка тысяч A. U.

Прохождения третьей звезды около звездной пары можно разделить на два типа: 1) прохождения, при которых минимальное расстояние проходящего тела до центра тяжести системы велико по сравнению с большой полуосью орбиты, 2) прохождения, при которых расстояние третьего тела до одной из компонент пары становится малым по сравнению с большой полуосью системы. Будем называть такие прохождения соответственно „далекими“ и „близкими“. Могут происходить так же прохождения и промежуточного типа, но мы на них останавливаться не будем, ибо они не имеют серьезного значения.

Уже Бор [8,9] показал (рассматривая прохождение частицы, взаимодействующей по закону Кулона, мимо атома), что роль „далеких“ прохождений ничтожно мала по сравнению с ролью „близких“ прохождений. Поэтому мы рассмотрим только „близкие“ прохождения. Рассмотрение, вдобавок, еще „далеких“ прохождений может лишь несколько уменьшить время релаксации, не меняя его порядок.

Для пар рассматриваемого типа орбитальная скорость движения вокруг центра тяжести — порядка одного или самое большее нескольких (2—3) километров. Между тем относительные скорости в звездной системе вообще порядка 30 *км/сек*. Поэтому практически в координатной системе, связанной с центром тяжести, спутник может считаться почти неподвижным. Время, в течение которого проходящая звезда будет оказывать главную часть своего воздействия на спутник, будет ничтожно малым по сравнению с временем обращения пары как вследствие указанного малого отношения скоростей, так и вследствие „близости“ прохождения. Поэтому каждый раз в результате возмущения у спутника будет появляться добавочная кинетическая энергия при неизменной потенциальной энергии, т. е. будет происходить либо некоторое увеличение энергии (большой полуоси), либо полное разрушение пары. Таким образом изменение энергии, очевидно, будет происходить всегда в сторону увеличения. Лишь в небольшом числе случаев, когда кинетическая энергия проходящей звезды по отношению к центру тяжести мала по сравнению с кинетической энергией спутника, мы можем иметь обратную картину. Но таких проходящих звезд будет сравнительно ничтожное число.

С другой стороны, описанные выше условия позволяют трактовать спутник как „свободный“, так как воздействие центральной звезды на спутник сказывается лишь в течение промежутка времени, слишком большого по сравнению с продолжительностью столкновения. Таким образом задача сводится к вычислению изменения кинетической энергии спутника при его сближении с проходящей звездой в координатной системе, связанной с центром тяжести пары.

Простое вычисление показывает, что приращение энергии во время такого далекого прохождения равно

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} \frac{1}{1 + \frac{p^2 v^4}{4m^2 \gamma^2}}, \tag{12}$$

если принять, что массы проходящей звезды и спутника одинаковы. Здесь p есть „параметр удара“, т. е. расстояние спутника от начальной прямой, по которой двигалась до сближения проходящая звезда. Число сближений, при которых параметр удара заключен между p и $p+dp$ за время dt и скорость проходящей звезды заключена между v и $v+dv$, равно

$$2\pi p\, dp\, v\, dt\, dn,$$

где dn — число звезд в единице объема, скорости которых заключены между v и $v+dv$. Поэтому приращение энергии за время t будет равно

$$\pi t \int mv^3 dn \int \frac{p\, dp}{1+\dfrac{p^2v^4}{4m^2\gamma^2}};$$

интегрирование по p нужно произвести по той области, в которой сближение можно считать „близким". Границей близких прохождений является $p=a$ (т. е. большой полуоси орбиты).

Поэтому

$$\Delta E = 2\pi t m^3 \gamma^2 \int \frac{\lg\left(1+\dfrac{a^2v^4}{4m^2\gamma^2}\right)}{v}\, dn,$$

или

$$\Delta E = 2\pi t m^3 \gamma^2 \frac{n}{\bar{v}} \lg\left(1+\frac{a^2\bar{v}^4}{4m^2\gamma^2}\right); \tag{13}$$

где n — полное число звезд в единице объема (звездная плотность), а $\bar{v}$ — некоторая средняя скорость. Если считать за время релаксации то время, в течение которого ΔE по абсолютной величине станет равно полной энергии системы — $\dfrac{\gamma m^2}{2a}$, то мы можем написать

$$t = \frac{\bar{v}}{4\pi m\gamma a n \lg\left(1+\dfrac{a^2v^4}{4m^2\gamma^2}\right)}. \tag{14}$$

Здесь нужно брать, конечно, некоторое среднее значение a за рассматриваемый период. Это среднее значение очень близко к начальному, ибо главная часть времени идет на увеличение энергии при меньших значениях a.

Подставим сюда $\bar{v}=3\cdot 10^6$ *см/сек*, вместо m — массу Солнца, и принимая, что наблюденные значения a доходят до $^1/_{20}$ парсека, а $n = 0.1\,\dfrac{1}{\text{парсек}^3}$, найдем, что $t=5\cdot 10^9$ лет. Для меньших значений a найдем величины порядка 10^{10} и 10^{11} лет.

Таким образом для двойных звезд с расстояниями компонентов, доходящими до десяти тысяч астр. ед., больцмановское распределение должно устанавливаться в течение времени порядка 10^{10} лет. Распределение Эпика $\left(\rho\sim\dfrac{1}{r^3}\right)$ выведено как раз для звезд с большим расстоянием компонентов (до десяти тысяч астр. ед.). Поэтому для таких пар на самом деле больцмановское распределение не имеет места. Отсюда можно заключить, что с момента образования этих пар прошло не более 10^{10} лет. Таким образом распределение больших полуосей двойных звезд самым определенным образом говорит в пользу „короткой шкалы времени“.

Приведенный аргумент был указан в нашей предварительной заметке, но вычисления времени релаксации нами не были в ней приведены. Это дало Джинсу повод написать, что: „I cannot see that Prof. Ambarzumian's remarks in any way challenge this position, so that, it seems to me that the observational date he mentions are not opposed to the long time scale of 10^{13} years, but only to an infinitely long time scale“.

Между тем мы видим, что простые вычисления указывают на то, что наблюдательные данные, о которых говорится, не только противоречат шкале в 10^{13} лет, но даже шкале 10^{10} лет, и тем самым целиком говорят в пользу „короткой шкалы“.

5. Диссоциативное равновесие для двойных звезд

Дальнейшим весьма важным фактом, указывающим на то, что прохождения еще не успели создать статистического равновесия для пар с расстояниями порядка 10^4 астр. ед., являются данные об отклонении числа наблюдаемых таких пар от формулы диссоциативного равновесия.

Если через δn_D обозначить число пар, спутники которых находятся внутри элемента $\delta\Gamma$ упоминавшегося выше фазового пространства, то согласно обычным соображениям кинетической теории газов при диссоциативном равновесии мы должны иметь

$$\frac{\delta n_D}{n^2} = \frac{\delta\Gamma}{(\pi m\theta)^{3/2}}\, e^{-\frac{E}{\theta}}, \tag{15}$$

где E — попрежнему, внутренняя энергия пары, когда спутник находится в элементе $\delta\Gamma$, θ — модуль больцмановского распределения для поступательного движения звезд, n — число одиночных звезд в единице объема. Если мы возьмем $\delta\Gamma$ в тех областях фазового пространства, в которых $a > 100$ астр. ед., то множитель $e^{-\frac{E}{\theta}}$ можно положить равным единице.

Тогда

$$\frac{\delta n_D}{n^2} = \frac{\delta\Gamma}{(\pi m\theta)^{3/2}}. \tag{16}$$

Суммируя, мы видим, что эта формула остается в силе и тогда, когда объем $\delta\Gamma$ имеет большие размеры с тем лишь ограничением, что в этот объем не должны попадать точки, в которых величина $\frac{E}{\theta}$ не мала по сравнению с единицей.

Возьмем поэтому ту область фазового пространства, для которой большая полуось a заключена в некоторых пределах a_1 и a_2. Этим пределам соответствуют пределы L

$$L_1 = m\sqrt{\gamma M}\, a_1^{1/2} \quad \text{и} \quad L_2 = m\sqrt{\gamma M}\, a_2^{1/2}.$$

Фазовый же объем, для которого L заключено в пределах между L_1 и L_2, равен

$$\delta\Gamma = 8\pi^3 \int\limits_{L_1}^{L_2} M \int\limits_0^L dG \int\limits_0^G dH = \frac{4\pi^3}{3}(L_2^3 - L_1^3),$$

или

$$\delta\Gamma = \frac{4\pi^3}{3} \cdot m^3 (\gamma M)^{3/2} (a_2^{3/2} - a_1^{3/2}). \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16) и полагая $M = m$, получим

$$\frac{\delta n_D}{n^2} = \frac{4}{3} m^3 \left(\frac{\pi\gamma}{\theta}\right)^{3/2} (a_2^{3/2} - a_1^{3/2}). \tag{18}$$

Подставляя в эту формулу для всех постоянных величин и концентрации n уже приводившиеся численные значения и полагая $a_2 = 10^4$, A. U. $a_1 = 10^2$ A. U., мы получаем

$$\frac{\delta n_D}{n} = 10^{-8},$$

т. е. из 10^8 звезд только одна должна иметь при диссоциативном равновесии спутника, большая полуось орбиты которого заключена между 100 A. U. и 10^4 A. U. На самом же деле мы знаем, что таким свойством обладает по меньшей мере из нескольких десятков одна звезда. Таким образом число далеких пар в действительности в миллионы раз больше, чем это должно быть при диссоциативном равновесии.

Это обстоятельство является, пожалуй, наиболее ярким фактом, указывающим на то, насколько наша галактическая система далека от состояния статистического равновесия.

Здесь мы опять можем повторить на основании вывода предыдущего параграфа, что сроки установления статистического равновесия для столь далеких пар — порядка 10^{10} лет. Поэтому такое отклонение от диссоциативного равновесия свидетельствует о справедливости короткой шкалы времени.

Поскольку в настоящее время в галактике имеется избыток двойных звезд по сравнению с равновесным состоянием, то понятно, что сейчас процессы разрушения пар происходят гораздо (может быть миллионы раз) чаще, чем процессы образования пар. Только в равновесном состоянии эти процессы компенсируют друг друга.

Грубо говоря, результат настоящего параграфа можно было формулировать следующим образом:

Существование таких пар, как α и Proxima Centauri или Washington 5583—5584, является доказательством короткой шкалы времени. В самом деле, звездных спутников с расстоянием порядка 10^4 A. U. так много, что даже ближайшая к нам звезда имеет такого спутника.

Заключение

В одно время, главным образом благодаря Джинсу, думали, что статистические особенности двойных звезд говорят в пользу долгой шкалы времени. С течением времени, когда все новые и новые факты из других областей звездной астрономии стали подтверждать короткую шкалу времени, выводы, сделанные Джинсом, оказались в противоречии с ними. Двойные звезды оставались главным аргументом в пользу долгой эволюционной шкалы. Но и это оказалось иллюзией. Мы видим, что теоретически правильное рассмотрение вопросов статистики орбит двойных звезд приводит именно к короткой эволюционной шкале. Показать это и являлось целью настоящей статьи.

Астрономическая обсерватория
Ленинградского университета.
Ноябрь, 1936.

Статья поступила в редакцию
4 декабря 1936 г.

Литература
Literature

1. Nature, **137**, 537, 1936.
2. Nature, **136**, 432, 1935.
3. Nature, **137**, 537, 1936.
4. Frank und Mises. Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Zweiter Teil, SS. 158—162, Braunschweig, 1927.
5. Aitken, The Binary Stars, 1935.
6. Tartu Observatory Publications, **25**, 1924.
7. Aitken, The New General Catalogue of Double Stars, Washington, 1933.
8. Bohr, Phil. Mag. **25**, 10, 1913.
9. Bohr, Phil. Mag. **30**, 581, 1915.
10. Seyfert, H. B., 896, 1934.
11. Barbier, C. R., **199**, 930, 1934.
12. Finsen, M. N., **96**, 862, 1936.

ON THE STATISTICS OF DOUBLE STARS

By *V. Ambarzumian*

The present paper deals with the distribution of elements of the double-star-orbits.

In § 1 the distribution of excentricities is considered. It is shown that in the case, when the density-function in the phase-space is an arbitrary function of energy of the system the number of binaries with excentricities smaller than ε will be proportional to ε^2. Therefore, from the observed proportionality of this number to ε^2 we cannot derive any conclusion about the specific form of the dependence of the density-function on the energy of pair. For example, from the observed distribution of excentricities we cannot decide whether the equipartition actually exists or not.

In § 2 the observed distribution of distances (Öpik) is considered and the distribution of major-axes (and energies) of orbits is derived. It is shown that the observed distribution of energies is in sharp discordance with the Boltzmann's law.

In § 3 the Opik's result about the distribution of distant companions is confirmed on the basis of Aitken's Catalogue.

In § 4 the time of relaxation for the binaries with $a = 10^3 - 10^4$ astr. units is calculated. It amounts about 10^{10}—10^{11} years. Therefore, the discrepancy between the observed distribution of energies (as it follows from Opik's law for distances) and Boltzmann's law is a very strong argument against the long-time scale of the evolution of stellar system. The statements of Jeans [2,3] on this subject are erroneous.

In § 5 is shown that the ratio of the number of the distant pairs and single stars in the state of dissociative equilibrium will be some millions times smaller than the observed ratio. According to § 4 the dissociative equilibrium sets in during 10^{10}—10^{11} years. The absence of the dissociative equilibrium is also a new argument against the long time-scale.

Astronomical Observatory
University, Leningrad